Profesor : José Cutipa

PITAGORAS ACADEMIA

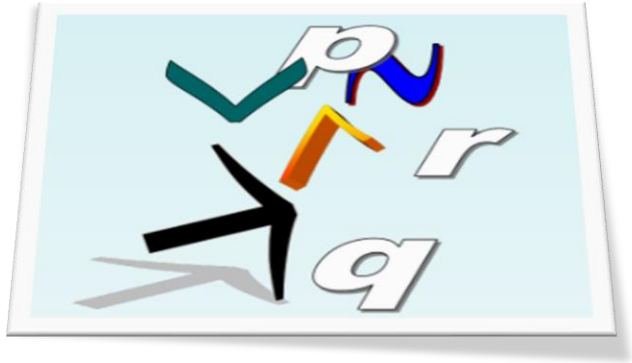
HABILIDAD LÓGICA MATEMÁTICA

GRUPO PITÁGORAS

HABILIDAD LÓGICO MATEMÁTICO

OBJETIVOS

Comprender y aplicar correctamente las tablas de verdad de los operadores lógicos así como también las leyes de la lógica proposicional



LÓGICA PROPOSICIONAL

Es una parte de la lógica que tiene por objeto de estudio a las proposiciones y la relación entre ellas, así como la función que tienen las variables proposicionales y los conectivos lógicos.

ENUNCIADO

Es toda frase u oración que se utiliza en el lenguaje cotidiano, por ejemplo:

- Lima es la capital del Perú
- El doble de 3 es 5
- ¿Qué hora es?
- ¡Auxilio!
- X + 2 = 7

CLASES DE ENUNCIADOS

ENUNCIADO

ENUNCIADO CERRADO (PROPOSICIÓN)

Es aquel enunciado que puede ser calificado como verdadero (v) o falso (F) sin ambigüedad en un **determinado contexto.**

Cusco es capital del Perú

$2 \div 2 + 2 = 3$

Juan trabaja y estudia

ENUNCIADO ABIERTO (CUASIPROPOSICIÓN)

Es aquel enunciado que contiene una o más variables y que no son verdaderos o falsos. Se le llama **función proposicional**.

$x < 5$ (No se sabe si es V o F)

Si x = 2, la expresión es verdadera
Si x = 7, la expresión es falsa

Además: *Toda **interrogación**, **deseo** o **admiración** no son proposiciones debido a que no se les puede calificar como verdadero o falso .*

¿Qué día es hoy?
Tengo sed
¡Eureka lo logre!

No son proposiciones

Los mandatos
Las preguntas
Las exclamaciones
Deseos
Opiniones
Enunciados abiertos

Él es un gran escritor

EJEMPLO

¿Cuál o cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones lógicas?

1. $X + 5 < 3$ — No es proposición (depende de x)
2. $\sqrt[3]{27} - 2 + 2020^0 \geq 6^2 - 16^{\frac{1}{2}}$ — Sí es proposición (V)
3. El agua ebulle a 120° C — Sí es proposición (F)
4. Aquí es necesario usar mascarilla — No es proposición (mandato)
5. ¡Ojalá todas las mañanas salga el sol! — No es proposición (deseo)

Respuesta: Son proposiciones 2 y 3

PROBLEMA 1

De las expresiones siguientes, indicar cuántas son proposiciones:

I. Piura es conocida como la Ciudad Blanca
II.3 es divisor de 12
III ¿Qué fecha es hoy?
IV. La semana tiene 5 días y el año 14 meses
V. “Quisiera ser millonario”
VI ¡Qué sorpresa!
VII. Ella no me ama

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

SOLUCIÓN:

Las proposiciones poseen un único valor de verdad (V o F)

I) Enunciado F (sí es proposición)

II) Enunciado V (sí es proposición)

III) Es pregunta

IV) Enunciado F (sí es proposición)

V) Es deseo

VI) Signo de exclamación

VII) Opinión

De los enunciados, 3 son proposiciones

PROBLEMA 2

¿Cuántos de los siguientes enunciados son proposiciones?

I) ¡Sí se puede!
II) Somos más, pagamos menos
III) ¿Por qué no te callas?
IV) $1 + 5 < 7$
V) Londres es la capital del Perú
VI) Alianza Lima descendió a segunda división

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

SOLUCIÓN:

I) Signo de admiración

II) Opinión, carece de valor de verdad

III) Es pregunta

IV) Enunciado verdadero (Sí es proposición) ☺

V) Enunciado falso (Sí es proposición) ☺

VI) Enunciado verdadero (Sí es proposición) ☺

De los enunciados, hay 3 proposiciones

CLASES DE PROPOSICIONES

PROPOSICIÓN LÓGICA

Las proposiciones se denotan con las letras minúsculas: ***p, q, r, s...etc.***

PROPOSICIÓN SIMPLE O ATÓMICA

Es aquella proposición afirmativa que expresa una sola idea, no tienen conectivos lógicos.

p: Kevin estudia inglés

q: 3 es un número primo

r: $-4^2 = 16$

Los conectivos lógicos son símbolos que enlazan o niegan proposiciones

PROPOSICIÓN COMPUESTA O MOLECULAR

Es aquella proposición que expresa mas de una idea, se obtienen al combinar dos o mas proposiciones simples o al negar una proposición simple.

Kevin estudia inglés y computación

p q

y *es llamado conectivo lógico*

CONECTIVOS LÓGICOS

Son palabras que se representan por símbolos, se utilizan para negar una proposición simple o enlazan proposiciones simples sin ser parte de ellos. Dichos símbolos también toman el nombre de operadores.

Los conectivos lógicos son:

No es cierto que jugaré fútbol

Luis trabaja y estudia

Jorge va a beber o comer

Si me rio entonces estoy alegre

Ingresaré si y solo si estudio

O me caso o me quedo soltero

OPERACIÓN LÓGICA	CONECTIVOS LÓGICOS	SÍMBOLO	REPRESENTACIÓN
NEGACIÓN	No es cierto que	~	~p
CONJUNCIÓN	… y …	∧	p ∧ *q*
DISYUNCIÓN INCLUSIVA	… o …	V	p V *q*
CONDICIONAL	Sí … entonces …	→	p → q
BICONDICIONAL	… sí y solo sí …	↔	p ↔ q
DISYUNCIÓN EXCLUSIVA	o … o ….	Δ	p Δ q

CONECTORES LÓGICOS

CONJUNCIÓN (Λ)

Dadas dos proposiciones p y q, se denomina conjunción de estas proposiciones a la proposición p Λ q (se lee "p y q")

Ejemplo:

5 es un número impar y 6 es un número par

p Λ **q**

TABLA DE VERDAD:

La conjunción será verdadera solo si sus componentes son verdaderas

p	q	p Λ q
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**F**

Palabras equivalentes
y = pero, sin embargo, cada vez que, así como, incluso, simultáneamente…

DISYUNCIÓN INCLUSIVA O DÉBIL (V)

Dadas dos proposiciones p y q, se denomina disyunción de estas proposiciones a la proposición p v q (se lee p o q)

Ejemplo:

Tiro las cosas viejas o que no me sirven

p v **q**

TABLA DE VERDAD:

La disyunción será falsa solo si sus componentes son falsas

p	q	p v q
V	V	**V**
V	F	**V**
F	V	**V**
F	F	**F**

Palabras equivalentes
o = a menos que, salvo que, excepto, o de lo contrario, o en tal sentido.

CONDICIONAL (→)

La condicional de las proposiciones p y q es la proposición p → q (si p entonces q). La proposición p se llama antecedente, y la proposición q se llama consecuente de la implicación o condicional.

Ejemplo:

Si apruebo entonces te presto un libro de RM

p → **q**

(antecedente) (consecuente)

TABLA DE VERDAD:

La tabla nos muestra que la condicional sólo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

p	q	p → q
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**V**
F	F	**V**

Palabras equivalentes
Entonces , implica, dado que.
Condicional inversa (←)
Yaque, porque, dado que,…

BICONDICIONAL (↔)

La bicondicional de las proposiciones p y q es la proposición p ↔ q (se lee "p si y sólo si q")

Ejemplo:

Iré a la fiesta, si solo sí tengo ropa nueva

p ↔ **q**

TABLA DE VERDAD:

Se observa que la bicondicional es verdadera, sólo si los valores de verdad de sus componentes son iguales, en caso contrario es falso.

p	q	p ↔ q
V	V	**V**
V	F	**F**
F	V	**F**
F	F	**V**

Palabras equivalentes
"Cuando y solo cuando"
"Entonces y solo entonces"
"Es idéntico"

DISYUNCIÓN EXCLUSIVA O FUERTE (Δ)

La disyunción de proposiciones p y q es la proposición p Δ q (se lee "p o q en sentido excluyente").

Ejemplo:

La puerta esta abierta o cerrada

p Δ q

TABLA DE VERDAD:

Es evidente que será verdadera si las proposiciones poseen valores veritativo opuestos

p	q	p Δ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Palabras equivalentes
No equivale a, no se define como, es diferente a, excluye a.

LA NEGACIÓN (~)

La negación afecta a una o más proposiciones

p	~ p
V	F
F	V

Palabras equivalentes
Es absurdo, no ocurre que, no es el caso, es mentira, jamás ocurre…

Existe 2 tipos de negación:

Negación simple

Cuando afecta a proposiciones simples, utiliza la forma gramatical "no"

Carlos no es varón

~ p

Negación compuesta

Afecta a proposiciones compuestas, se reconoce como: "es falso que", "No es el caso", "Es mentira", …

No es cierto que seas varón y mujer

~ [p ∧ q]

TABLAS DE VERDAD

CONJUNCIÓN (∧)

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

DISYUNCIÓN (V)

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

CONDICIONAL (→)

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

BICONDICIONAL (↔)

p	q	p q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

DISYUNCIÓN EXCLUSIVA O FUERTE (Δ)

p	q	p Δ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

LA NEGACIÓN (~)

p	~ p
V	F
F	V

EJEMPLO APLICATIVO

Si la siguiente proposición:

$$[(p \wedge q) \rightarrow \sim (t \,\Delta\, q)]$$

es falsa, determine el valor de verdad de p, q y t en el orden indicado.

A) VFF B) VFV C) VVF D) FVV E) VVV

SOLUCIÓN:

$$\underbrace{\underbrace{[(\overset{V}{p} \wedge \overset{V}{q})}_{V} \rightarrow \underbrace{\sim \underbrace{(\overset{F}{t} \,\Delta\, \overset{V}{q})}_{V}}_{F}]}_{F}$$

p = V
q = V
t = F

Nos piden los valores de p, q y t

V V F

PROBLEMA 3

Si la siguiente proposición es falsa:

$$[\sim(p \rightarrow q) \ \wedge \ \sim r] \rightarrow [p \ \wedge \ (q \ \vee \ r)]$$

Es falsa, halle los valores de verdad de p,q ,r .

A) VFF B) VVF C) VVV D) FVV E) FFF

SOLUCIÓN:

Analizando el esquema

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\sim(\overset{V}{p} \rightarrow \overset{F}{q})}_{F}}_{V} \wedge \underbrace{\sim \overset{F}{r}}_{V}}_{V} \rightarrow \underbrace{[\overset{V}{p} \wedge \underbrace{(\overset{F}{q} \vee \overset{F}{r})}_{F}]}_{F}$$

$$F$$

Los valores de p, q y r son: VFF

PROBLEMA 4

Si la siguiente proposición es verdadera

$$p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow (r \wedge s)) \wedge (s \rightarrow w)$$

entonces

I. s es verdadera.

II. w es falsa.

III. q es falsa.

Son correctas:

A) Solo I B) Solo II C) Solo III

D) I y II E) II y III

SOLUCIÓN:

$$\underbrace{p}_{V} \wedge \underbrace{(\underbrace{p}_{V} \rightarrow \underbrace{q}_{V})}_{V} \wedge \underbrace{(\underbrace{q}_{V} \rightarrow \underbrace{(\underbrace{r}_{V} \wedge \underbrace{s}_{V})}_{V})}_{V} \wedge \underbrace{(\underbrace{s}_{V} \rightarrow \underbrace{w}_{V})}_{V}$$

Se deduce que: p, q, r, s, w son verdaderas

RECORDAR:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Otras palabras que indican conjunción son:
además, pero, sin embargo, aunque, también, ...

En los enunciados:

I. s es verdadera. ✓

II. w es falsa. x

III. q es falsa. x

Solo I es correcta

PROBLEMA 5

Si la proposición $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)$ es falsa, halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones en el orden indicado.

I) $[(\sim r \leftrightarrow p) \leftrightarrow \sim q] \vee q$

II) $[\sim (r \rightarrow \sim t) \rightarrow p] \wedge q$

III) $[(\sim p \vee q) \Delta p] \leftrightarrow \sim q$

A) VVF

B) VVV

C) VFF

D) VFV

E) FFF

SOLUCIÓN:

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{V}{p} \wedge \underset{V}{q})}_{V} \rightarrow \underbrace{(\underset{V}{q} \wedge \underbrace{\overset{V}{\sim r}}_{F})}_{F}}_{F}$$

Los valores de verdad

p : V
q : V
r : V

Analizando cada enunciado

I) $\underbrace{\underbrace{[(\sim r \leftrightarrow p) \leftrightarrow \sim q]}_{} \vee \underset{V}{q}}_{V}$

II) $\underbrace{\underbrace{[\underbrace{\sim (r \rightarrow \sim t)}_{} \rightarrow \underset{V}{p}]}_{V} \wedge \underset{V}{q}}_{V}$

III) $\underbrace{\underbrace{\underbrace{[(\underset{F}{\sim p} \vee \underset{V}{q})}_{V} \Delta \underset{V}{p}]}_{F} \leftrightarrow \underset{F}{\sim q}}_{V}$

Todos los enunciados son verdaderos

PROBLEMA 6

Si $P(X): x + 2 < 7$,
$Q(X): X^2 - 3x = 4$

Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $[(P(2)\Delta P(5)] \leftrightarrow [Q(4)\wedge Q(5)]$
II. $[Q(-1)\Delta P(3)] \rightarrow [Q(5)\Delta P(4)]$
III. $\{[Q(2) \leftrightarrow P(5)]\ \Delta P(5)\}\wedge P(6)$

A) VFV
B) FVF
C) VVF
D) VVV
E) FFF

SOLUCIÓN:

Enunciado I

$P(2): 2 + 2 < 7 \quad (V)$
$P(5): 5 + 2 < 7 \quad (F)$
$Q(4): 4^2 - 3(4) = 4 \quad (V)$
$Q(5): 5^2 - 3(5) = 4 \quad (F)$

$$\underbrace{\underbrace{[(P(2)\Delta P(5)]}_{V\ \ F} \leftrightarrow \underbrace{[Q(4)\wedge Q(5)]}_{V\ \ F}}_{V\ \ F}$$

☺ F

Enunciado II

$Q(-1): (-1)^2 - 3(-1) = 4 \quad (V)$
$P(3) \ : 3 + 2 < 7 \quad (V)$
$Q(5) \ : 5^2 - 3(5) = 4 \quad (F)$
$P(4) \ : 4 + 2 < 7 \quad (V)$

$$\underbrace{\underbrace{[Q(-1)\Delta P(3)]}_{V\ \ V} \rightarrow \underbrace{[Q(5)\Delta P(4)]}_{F\ \ V}}_{F\ \ V}$$

☺ V

Enunciado III

$P(6): 6 + 2 < 7 \quad (F)$

$$\underbrace{\boxed{\{[Q(2) \leftrightarrow P(5)]\ \Delta P(5)\}} \wedge \underbrace{P(6)}_{F}}_{F}$$

☺ F

PROBLEMA 7

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

I. Si 2 + 3 = 7 entonces 5 + 5 = 10

II. No es verdad que 3+3=7 si solo si 4+4=10

III. Es falso que si Paris está en Francia entonces Lima está en Colombia

IV. No es cierto que 1+1=3 o que 2+1=3

A) VVFF B) VFVF C) VVVV D) FFFF E) FVFV

SOLUCIÓN:

Analizando los enunciados

I. Si 2 + 3 = 7 entonces 5 + 5 = 10

F → V

V

II. No es verdad que 3 + 3= 7 si solo si 4 + 4 = 10

~ F ↔ F

V

F

III. Es falso que:

Paris está en Francia entonces Lima está en Colombia

V → F

F

~ F =**V**

IV. No es cierto que 1 + 1= 3 o que 2 + 1= 3

~ F v V

V

F

Los valores de verdad respectivamente son **VFVF**

ESQUEMAS MOLECULARES

Estos están formados por varias proposiciones simples unidos a conectores lógicos.

Ejemplo:

- $(p \wedge q) \rightarrow r$
- $(\sim p \vee q) \leftrightarrow p$

Los valores de verdad de una o más proposiciones se pueden esquematizar mediante una tabla de verdad

Para una proposición

p
V
F

Para dos proposiciones

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Para tres proposiciones

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

El número de filas dependerá del número de variables

$$\# \text{ filas} = 2^n$$

n: cantidad de variables

TABLAS DE VERDAD

Nos muestra el valor o los valores que toma el conector de mayor jerarquía.

Ejemplo:

Evalúe el siguiente esquema: $(p \wedge \sim q) \vee (q \rightarrow p)$

p	q	$(p \wedge \sim q)$			$\vee$	$(q \rightarrow p)$		
V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	F	V	F

Matriz principal

Dependiendo los valores que tome la matriz principal tendremos:

Tautología (T)	Todos sus valores son **V**
Contradicción ($\perp$)	Todos sus valores son **F**
Contingencia (C)	Posee al menos un **V** y un **F**

FORMACIÓN DE ESQUEMAS MOLECULARES

Con frecuencia se necesita convertir un texto largo a un texto mas pequeño que indique lo mismo. Para ello es necesario formalizar dicho texto es decir trasladar el texto a un esquema molecular.

Para formalizar un texto se siguen los siguientes pasos:

1. Se identifican las proposiciones simples
2. Se identifican los conectivos lógicos
3. Se agrupan las proposiciones haciendo uso de los signos de puntuación, considerando la jerarquía de los signos de puntuación

CRITERIO DE LOS SIGNOS DE PUNTUACIÓN

La jerarquía es la siguiente

coma → Punto y coma → Punto seguido → Punto aparte

Menor jerarquía — *Mayor jerarquía*

CRITERIO DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS

Si no hay signos de puntuación los operadores del mismo orden se resuelven de izquierda a derecha considerando la siguiente jerarquía

$\sim$ → $\wedge$ → $\vee$ → Δ → $\rightarrow$ → $\leftrightarrow$

Menor jerarquía — *Mayor jerarquía*

PROBLEMA 8

Construir la tabla de verdad e indicar los valores de la matriz principal

$$(p \vee \sim q) \rightarrow (\sim p \vee q)$$

A) VFVV B) FFFF C) VVFF D) VFVF E) VFFF

SOLUCIÓN:

p	q	(p	∨	~q)	→	(~ p	∨	q)
V	V	V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	F

La matriz principal tiene valores:

VFVV

PROBLEMA 9

Clasifique cada proposición como Tautología (T), Contradicción ($\perp$) o Contingencia(C); según en el orden indicado.

I. $(p \rightarrow q)\ \Delta\ p$
II. $(p \vee q) \rightarrow p$
III. $[(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim p]$

A) T, C, C B) C, C, T C) T, C, $\perp$ D) C, C, C E) T, T, T

SOLUCIÓN:

Realizamos la tabla de verdad para cada esquema molecular

I. $(p \rightarrow q)\ \Delta\ p$

Contingencia

p	q	(p → q)	Δ	p
V	V	V	**F**	V
V	F	F	**V**	V
F	V	V	**V**	F
F	F	V	**V**	F

II. $(p \vee q) \rightarrow p$

Contingencia

p	q	(p v q)	→	p
V	V	V	**V**	V
V	F	V	**V**	V
F	V	V	**F**	F
F	F	F	**V**	F

III. $[(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim p]$

Contingencia

p	q	(p	↔	~q)	↔	~p
V	V	V	F	F	**V**	F
V	F	V	V	V	**F**	F
F	V	F	V	F	**V**	V
F	F	F	F	V	**F**	V

Los tres esquemas son contingentes

PROBLEMA 10

Dadas las proposiciones:

p: Marco es comerciante
q: Marco es un próspero industrial
r: Marco es ingeniero

A) $\sim (p \wedge q) \rightarrow (r \vee p)$

B) $(\sim p \wedge q) \rightarrow (r \wedge q)$

C) $\sim (p \vee q) \rightarrow (r \vee p)$

D) $\sim (p \wedge q) \rightarrow (r \vee \sim p)$

E) $(p \vee q) \rightarrow (r \vee p)$

SOLUCIÓN:

"Si no es el caso que Marcos sea un comerciante y un próspero industrial, entonces es ingeniero o no es comerciante".

$\sim \quad [\, p \quad \wedge \quad q \,] \quad \rightarrow \quad [\, r \quad \vee \sim \quad p \,]$

Pasos a seguir

Identificar variables
Identificar conectores
Simbolizar

La simbolización es:

$$\sim (p \wedge q) \rightarrow (r \vee \sim p)$$

CLAVES – CAPITULO 18

Ejercicios en clase		Ejercicios para el alumno	
1 C	6 B	1 B	6 A
2 C	7 B	2 B	7 C
3 C	8 A	3 E	8 B
4 A	9 D	4 A	9 A
5 A	10 D	5 E	10 C